

# Herleitung der **BAX** Formeln

## Gewinnwahrscheinlichkeit / Gewinnerwartung

Mit Hilfe der **Standardnormalverteilung**

$$(1) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-0,5t^2} dt$$

lassen sich in sehr guter Näherung Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung bestimmen. Eine Binomialverteilung liegt dann vor, wenn numerisch messbare Merkmale wie z.B. Schuhgröße, Intelligenzquotient, Benotung oder BAX gleichmäßig in Anlehnung einer Glockenkurve verteilt vorliegen.

*Excel-Anwender kennen die Funktion Standardnormalverteilung als STANDNORMVERT().*

Setzt man in die Formel (1)  $x = \frac{D}{\sqrt{2}\sigma}$  mit  $D$  als Differenz zweier BAX-Werte ( $D = B_A - B_B$ ) und  $\sigma$  als frei zu wählende Standardabweichung  $\sigma = 25$  ein, so kann

$$(2) \quad W_D = \Phi\left(\frac{D}{\sqrt{2}\cdot 25}\right)$$

als Gewinn**wahrscheinlichkeit** oder **Gewinnerwartung** von SpielerA gegenüber SpielerB gedeutet werden.

*Der Schachverband setzt  $\sigma = 200$  und verwendet damit eine 8fache Skalierung für seine ELO-Zahlen, benannt nach dem Urheber Professor Arpad Elo.*

*Da die wenigsten Programmiersprachen eine Funktion zur Standardabweichung verfügbar haben, reglementiert der Schachverband die Umrechnung von  $D$  nach  $W_D$  über eine Tabelle.*

Eine alternative Umrechnung von  $D$  nach  $W_D$  bietet die Näherungsformel

$$(2') \quad W_D = \frac{1}{1 + 10^{-D/50}}$$

und liefert kaum merkbare Unterschiede zu den Werten, die nach (2) berechnet werden. Der maximale Fehler von (2') gegenüber (2) beträgt 0,015 Einheiten und hat kaum messbare Auswirkungen.

Mit der Näherungsformel

$$(2'') \quad W_D = \frac{D + 50}{100}$$

ergeben sich ebenfalls große Übereinstimmungen mit den Ergebnissen zu (2). Diese Darstellung erlaubt nun durch die Wahl von  $\sigma = 25$  eine einfache Interpretation:

die BAX Differenz zweier Spieler auf 50 angerechnet ergibt unmittelbar die Gewinnerwartung.

### Beispiel

$B_A = 500$  und  $B_B = 520$  führt zu  $D = 500 - 520 = -20$  und damit zu  $-20 + 50 = 30$ .

Dies bedeutet, dass Spieler A gegenüber Spieler B eine Gewinnerwartung von 30% (=0,3) hat und umgekehrt Spieler B gegenüber Spieler A eine Gewinnerwartung von 70% hat.

Nach (2') ergeben sich 29% und 71%, was die Verwendung von (2'') zumindest für eine erste Einschätzung brauchbar macht.

In nachfolgender Tabelle sind die Gewinnerwartungen zu allen drei Varianten für  $D = B_{\text{Spieler}} - B_{\text{Gegner}}$  aufgeführt.

Differenz	Gewinnerwartung gemäß		
	$B_{\text{Sp}} - B_{\text{Geg}}$	(2)	(2')
0	0,500	0,500	0,500
1	0,511	0,512	0,510
2	0,523	0,523	0,520
3	0,534	0,534	0,530
4	0,545	0,546	0,540
5	0,556	0,557	0,550
6	0,567	0,569	0,560
7	0,578	0,580	0,570
8	0,590	0,591	0,580
9	0,600	0,602	0,590
10	0,611	0,613	0,600
11	0,622	0,624	0,610
12	0,633	0,635	0,620
13	0,643	0,645	0,630
14	0,654	0,656	0,640
15	0,664	0,666	0,650
16	0,675	0,676	0,660
17	0,685	0,686	0,670
18	0,695	0,696	0,680
19	0,705	0,706	0,690
20	0,714	0,715	0,700
21	0,724	0,725	0,710
22	0,733	0,734	0,720
23	0,742	0,743	0,730
24	0,751	0,751	0,740
25	0,760	0,760	0,750
26	0,769	0,768	0,760
27	0,777	0,776	0,770
28	0,786	0,784	0,780
29	0,794	0,792	0,790
30	0,802	0,799	0,800
31	0,810	0,807	0,810
32	0,817	0,814	0,820
33	0,825	0,820	0,830
34	0,832	0,827	0,840
35	0,839	0,834	0,850
36	0,846	0,840	0,860
37	0,852	0,846	0,870
38	0,859	0,852	0,880
39	0,865	0,858	0,890
40	0,871	0,863	0,900
41	0,877	0,869	0,910
42	0,883	0,874	0,920
43	0,888	0,879	0,930
44	0,893	0,884	0,940
45	0,898	0,888	0,950
46	0,903	0,893	0,960
47	0,908	0,897	0,970
48	0,913	0,901	0,980
49	0,917	0,905	0,990
50	0,921	0,909	1,000

Differenz	Gewinnerwartung gemäß		
	$B_{\text{Sp}} - B_{\text{Geg}}$	(2)	(2')
51	0,925	0,913	1,000
52	0,929	0,916	1,000
53	0,933	0,920	1,000
54	0,937	0,923	1,000
55	0,940	0,926	1,000
56	0,943	0,929	1,000
57	0,947	0,932	1,000
58	0,950	0,935	1,000
59	0,952	0,938	1,000
60	0,955	0,941	1,000
61	0,958	0,943	1,000
62	0,960	0,946	1,000
63	0,963	0,948	1,000
64	0,965	0,950	1,000
65	0,967	0,952	1,000
66	0,969	0,954	1,000
67	0,971	0,956	1,000
68	0,973	0,958	1,000
69	0,975	0,960	1,000
70	0,976	0,962	1,000
71	0,978	0,963	1,000
72	0,979	0,965	1,000
73	0,981	0,966	1,000
74	0,982	0,968	1,000
75	0,983	0,969	1,000
76	0,984	0,971	1,000
77	0,985	0,972	1,000
78	0,986	0,973	1,000
79	0,987	0,974	1,000
80	0,988	0,975	1,000
85	0,992	0,980	1,000
90	0,995	0,984	1,000
95	0,996	0,988	1,000
100	0,998	0,990	1,000
105	0,999	0,992	1,000
110	0,999	0,994	1,000
115	0,999	0,995	1,000
120	1,000	0,996	1,000
125	1,000	0,997	1,000
130	1,000	0,997	1,000
135	1,000	0,998	1,000
140	1,000	0,998	1,000
145	1,000	0,999	1,000
150	1,000	0,999	1,000
160	1,000	0,999	1,000
170	1,000	1,000	1,000
180	1,000	1,000	1,000
190	1,000	1,000	1,000
200	1,000	1,000	1,000

Da Prozentwerte größer 100 keinen Sinn ergeben, ist die Anwendungsbreite von (2'') begrenzt. Dies wurde in der Tabelle bereits eingearbeitet: Differenzen größer als 50 haben den konstanten Wert 1,000 = 100% erhalten.

Bei negativen Differenzen erhält man die Gewinnerwartung über die Tabelle mit  $1 - \text{Tabellenwert}$ .

*Beispiel*

$D = -32$  führt zur Gewinnerwartung  $W_D = 1 - 0,814 = 0,186$ .

### Korrektur

Die Summe der Gewinnerwartungen kann als Anzahl der zu erwartenden Siege (SollSiege)  $S_{Soll}$  angesehen werden. Die tatsächlich erzielten Siege (IstSiege)  $S_{Ist}$  stehen dem gegenüber. Ein Vergleich von Ist-Siegen und Soll-Siegen wird als Maß für eine BAX-Korrektur  $K$  herangezogen.

$$(3) \quad K = 7 \cdot (S_{Ist} - S_{Soll})$$

Der Faktor 7 wurde so bestimmt, dass ein Spieler, der 50% der Gewinnpunkte erzielt hat, nach ca. 12 Spielen einen BAX erhalten wird, der etwa dem Niveau seiner Gegner entspricht.

Mit Hilfe der Korrektur  $K$  kann jetzt aus dem alten BAX-Wert  $B_{alt}$  ein neuer BAX-Wert  $B_{neu}$  über  $B_{neu} = B_{alt} + K$  berechnet werden

$$(4) \quad B_{neu} = B_{alt} + 7 \cdot (S_{Ist} - S_{Soll}) .$$

Für  $S_{Ist}$  zählt ein Sieg mit 1 bzw. 0,8 bei einem Dreisatzspiel und eine Niederlage mit 0 bzw. 0,2 bei einem Dreisatzspiel.

*Der Schachverband verwendet statt 7 den Faktor 15 im Normalfall (bezogen auf  $\sigma = 200$ ) und setzt Sieg = 1, Remis = 0,5 sowie Niederlage = 0.*